Session de 1974

CONCOURS SPECIAL DE RECRUTEMENT AUX GRANDES ECOLES SCIENTIFIQUES

MECANIQUE

Soit un repère (T) : [Origine O. Base orthonormée positive $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$]. Les trois axes x'Ox, y'Oy, z'Oz ont pour vecteurs unitaires respectifs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$; $\vec{k}$ est vertical ascendant. Le trièdre (T) sera dit absolu.

On considère un point matériel M de masse m. Dans les questions 1) 2) 3) 4) on étudiera le mouvement <u>absolu libre</u> de M : $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, t étant le temps. Dans les questions 5) 6) 7) l'étude portera sur le mouvement ou l'équilibre relatif de M (libre ou lié) par rapport à un nouveau trièdre trirectangle (T_1) dit relatif, lequel est en rotation <u>uniforme</u> par rapport à (T) autour de Oz, la vitesse angulaire étant la constante $\omega > 0$; le trièdre (T_1), de même origine O, a pour axes X'OX, Y'OY, Z'OZ de vecteurs unitaires $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ définis par : $\vec{K} = \vec{k}$; $(\vec{i}, \vec{I}) = \omega t$; $(\vec{I}, \vec{J}) = +\frac{\pi}{2}$.

Les vecteurs vitesse et accélération absolues de M sont désignés par $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$

Les vecteurs vitesse et accélération relatives de M sont désignés $\vec{V_r}$ et $\vec{\Gamma_r}$

On considérera les deux mobiles P et Q :

P est le mobile projection orthogonale de M sur le plan z = 0 [ou Z = 0]

Q est le mobile projection orthogonale de M sur l'axe (z'Oz) [ou l'axe Z'OZ]

(1) Dans le trièdre (T) le mobile libre M est supposé soumis à deux forces :

α) son poids : $m\vec{g} = -mg\vec{k}$ (g>0, accélération numérique de la pesanteur)

β) une force fonction de la vitesse :

$2m\vec{\Omega}\wedge\vec{V}$ avec $\vec{\Omega} = \omega\vec{k}$ [ω définie ci-dessus]

Ecrire l'équation différentielle vectorielle du mouvement de M. Montrer que $\frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[2\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OP}\right]$, puis que

$\vec{\mathcal{M}} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} - 2\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OP}$ est un vecteur constant. En déduire l'existence d'un point fixe C, unique dans le plan $z = 0$, tel que

$\frac{d\overrightarrow{CP}}{dt} = 2\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{CP} = (2\omega)\ \vec{k}\wedge\overrightarrow{CP}$.

Montrer que le mouvement de P [dans $z = 0$] est circulaire uniforme de centre C, de vitesse angulaire 2ω. Montrer que la trajectoire (L) de M est tracée sur un cylindre de révolution d'axe parallèle à z'Oz.

(2) A l'instant $t = 0$, on lance le point libre M de la position A. $[\overrightarrow{OA} = a\vec{i}$ ($a>0$ constant)] avec le vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{V_0} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{v_0}{\sqrt{2}}\vec{k}$ (v_0 constante positive). Déterminer les coordonnées x_c et y_c du centre C. Prenant a et ω fixés, quelle valeur faut-il donner à v_0 pour que la trajectoire (L) de M soit située sur le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = a^2$?

<u>Cette valeur sera supposée être réalisée dans les questions 2) 3) 4) et dans ces questions 2) 3) 4) seulement</u>.

Ecrire les équations du mouvement de M (x, y, z, en fonction de t et des constantes). Nature de l'hodographe (n) du mouvement de M ?

(3) Donner, en fonction de z, le carré de la vitesse numérique v de M [$v = \|\vec{V}\|$]

Montrer que la droite (D) issue de M et de même direction que $\vec{\Gamma}$, s'appuie sur z'Oz, en faisant avec cet axe, un angle aigu constant α Calculer tg α

Le plan osculateur en M à (L) coupant z'Oz en E, quel est l'angle $\widehat{OEM}$?

(4) La cote z de M passe par une valeur maximale z_S en un point S de (L). Quelle est la vitesse numérique de M en S ? Déterminer pour (L) en ce point S :

la tangente, la normale principale, le rayon de courbure R. (Faire une figure dans le plan OzS).

- 3 -

Si Λ est le centre de courbure de (L) en S, montrer que la perpendiculaire en Λ au plan osculateur en S passe par le point Q $[0, 0, z_S]$ correspondant.

⑤ Désormais, le point M étant soumis aux deux forces absolues définies en α) et β) [§1] , on se propose d'étudier dans les questions suivantes le mouvement ou l'équilibre relatif de M dans (T_1).

Montrer d'abord que, si M est <u>libre</u>, on a

$$\vec{\Gamma}_r = - g\vec{k} - \omega^2 \overrightarrow{QM}.$$

⑥ On considère une droite matérielle [tige] (Δ) liée à (T_1) d'équations [dans (T_1)] $(\Delta)\begin{cases} Y = 0 \\ X + Z = a_1 \end{cases}$ (a_1 constante positive). On oriente cette droite de O_1 [coordonnées $(a_1, 0, 0)$ dans (T_1)] vers U [coordonnées $(0, 0, a_1)$ dans (T_1)] ; elle a donc pour vecteur unitaire [dans (T_1)] $\vec{\ell}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Le point M lié se déplace sur (Δ) en liaison bilatérale sans frottement. On pose $\overrightarrow{O_1M} = s\vec{\ell}$.

On suppose qu'à l'instant t = 0, M est en O_1 avec la vitesse relative $(\vec{V}_r)_0 = \vec{0}$.

Déterminer s en fonction de t. Ce mouvement relatif lié est vibratoire. Quel est le centre de l'oscillation ? Quelle est, lors du passage en O_1, la force de réaction de la barre (Δ) sur M ?

⑦ Soit le cercle (Φ) matériel lié à (T_1) d'équations $(\Phi)\begin{cases} Y = 0 \\ X^2 + Z^2 - 2a_1X = 0 \end{cases}$ dans (T_1). Le point M se déplace sur (Φ) en liaison bilatérale parfaitement polie. On demande de déterminer graphiquement (par l'intersection de (Φ) avec une certaine conique) les deux positions d'équilibre relatif de M [Ce sont les points où, M étant placé avec une vitesse relative nulle, il existe un vecteur $\vec{\rho}$ normal à (Φ), tel que

$$- g\vec{k} - \omega^2 \overrightarrow{QM} + \frac{\vec{\rho}}{m} = \vec{0}\,]$$

<u>N.B.</u> Les questions 6) et 7) sont indépendantes.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail